第 13 講　図形と方程式(1)

1 ［1］　座標平面上の直線 $x+2y=6$ 上にあって，点 $(2,\ -3)$ との距離が最小になる点の座標を求めよ．

［2］　2 直線 $4x+3y-14=0$，$x-3y-11=0$ の交点を通り，直線 $x-y+4=0$ と直交する直線を求めよ．

【Point Pickup】

［1］　**2 点間の距離**

2 点 $(a,\ b)$，$(c,\ d)$ の距離は

2 直線が垂直 $\Longleftrightarrow$ 2 直線の「傾きの　　　$=-1$」

図形的な処理

例えば「距離が最小」という問題が与えられたとき，距離が最小になるときの状態を「　　　」し，その状態になるための条件を考え，立式する．

［2］　**2 曲線の交点を通る図形**

2 曲線 $f(x,\ y)=0$，$g(x,\ y)=0$ の交点を通る図形は

$f(x,\ y)+\quad\times g(x,\ y)=0$　と表せる．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　xy 平面上に3点 A$(0,\ \sqrt{3})$，B$(-1,\ 0)$，C$(1,\ 0)$ を頂点とする △ABC がある．△ABC の面積が直線 $y=\sqrt{3}x+b$ で二等分されるように，定数 b の値を定めよ．

[2]　直線 l：$px-(p+1)y+2p-1=0$（p は実数）が与えられている．

(1)　直線 l は，p の値に関わらずある定点を通る．その定点の座標を求めよ．

(2)　直線 l が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で x 軸と交わるとき，p のとりうる範囲を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　図形の特徴をつかむ

与えられた座標や直線の傾きなどから，図形の特徴をつかむ.

「　　　　」が使われているときに注意.

[2]　定点を通る直線

直線の式に文字が含まれているときは，その文字の「　　　　」になる場合がある.

恒等式となるときの x，y の値が，その直線の通る定点となる.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ 点Pが円 $x^2-2x+y^2-2y-18=0$ の上を動くとき，点A(4, 1)との距離APの最小値と最大値を求めよ．

［2］ 2点A(4, −2)，B(1, −3)を通り，中心が直線 $y=3x-1$ 上にある円の方程式を求めよ．

【Point Pickup】

［1］ **円外・円内の1点から円周上の点までの距離の最大・最小**

⇒ その点と円の「　　　」を結ぶ直線がカギ．

［2］ **円の弦の性質**

・円の弦に中心から下ろした垂線は，弦を「　　　」に「　　　　」する．

・円の中心は，弦の「　　　　　　　」上にある．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　図形と方程式(1)

［1］　2直線 $2x+3y=1$，$3x+y=5$ の交点を通り，直線 $3x+2y=6$ に平行な直線の方程式は $y=-\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}x+\boxed{ウ}$ である．

［2］　直線 $(5k+3)x-(3k+5)y-10k+10=0$ が k の値によらず通る定点の座標は $(\boxed{エ},\ \boxed{オ})$ である．

［3］　3点 A(5, 4)，B(1, 2)，C(6, 1) がある．線分 AB の垂直二等分線を表す式は $y=-\boxed{カ}x+\boxed{キ}$ である．また，3点 A，B，C を通る円の中心の座標は $\left(\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}},\ \dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}\right)$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　図形と方程式(1)

1 [1]　座標平面上の直線 $x+2y=6$ 上にあって，点 $(2,\ -3)$ との距離が最小になる点の座標を求めよ.

直線 $x+2y=6$ 上の点を $(-2t+6,\ t)$ とおくと，この点と $(2,\ -3)$ の距離 l について

$l^2=\{(-2t+6)-2\}^2+(t+3)^2=(-2t+4)^2+(t+3)^2$

$\quad =5t^2-10t+25=5(t-1)^2+20$

よって $t=1$ のとき l^2 は最小．$l>0$ より，このとき l も最小となる.

したがって求める点の座標は　**(4, 1)**

(別解)　求める点の座標は，点 $(2,\ -3)$ から直線 $x+2y=6$ に下ろした垂線の足の座標である.

直線 $x+2y=6$（傾き $-\dfrac{1}{2}$）と垂直で点 $(2,\ -3)$ を通る直線は

$y=2(x-2)-3=2x-7$

これと直線 $x+2y=6$ の交点の座標は　$(4,\ 1)$．これが求める点の座標である.

1 [2]　2直線 $4x+3y-14=0$，$x-3y-11=0$ の交点を通り，直線 $x-y+4=0$ と直交する直線を求めよ.

2直線 $4x+3y-14=0$，$x-3y-11=0$ の交点の座標は $(5,\ -2)$

この点を通り，$x-y+4=0$（傾き 1）と垂直な直線は

$y=-1\cdot(x-5)-2=-x+3$　　よって求める直線は　$\boldsymbol{y=-x+3}$

(別解)　2直線 $4x+3y-14=0$，$x-3y-11=0$ の交点を通る直線は

$x-3y-11+k(4x+3y-14)=0$

$\iff (4k+1)x+(3k-3)y-14k-11=0$　……①

と表せる.

①と直線 $x-y+4=0$ が直交するので，$1\cdot(4k+1)-1\cdot(3k-3)=0$　　$k=-4$

このとき①より　$-15x-15y+45=0$　　よって求める直線は　$y=-x+3$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　xy 平面上に3点 $\mathrm{A}(0,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ がある．$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積が直線 $y=\sqrt{3}x+b$ で二等分されるように，定数 b の値を定めよ．

直線ABの傾きは $\sqrt{3}$ より，直線 l：$y=\sqrt{3}x+b$ と直線ABは平行である．

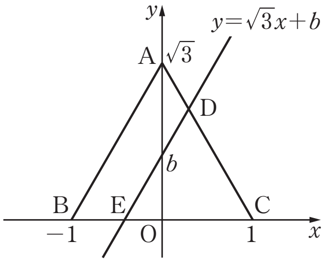
直線 l と線分AC，BCとの交点をそれぞれD，Eとすると

$\triangle\mathrm{DEC}:\triangle\mathrm{ABC}=1:2$ であればよい．

このとき，$\triangle\mathrm{DEC}\backsim\triangle\mathrm{ABC}$ より $\mathrm{BC}:\mathrm{EC}=\sqrt{2}:1$

よって　$2:\mathrm{EC}=\sqrt{2}:1$　より　$\mathrm{EC}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

したがって，$b=\mathrm{EO}\times\sqrt{3}=(\sqrt{2}-1)\times\sqrt{3}=\boldsymbol{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$



2 [2]　直線 l：$px-(p+1)y+2p-1=0$（p は実数）が与えられている．

(1)　直線 l は，p の値に関わらずある定点を通る．その定点の座標を求めよ．

(2)　直線 l が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で x 軸と交わるとき，p のとりうる範囲を求めよ．

(1)　直線 l：$px-(p+1)y+2p-1=0$　を変形すると

$$(x-y+2)p+(-y-1)=0$$

これがすべての実数 p について成立するのは　$x-y+2=0$，$-y-1=0$

つまり　$x=-3$，$y=-1$ のとき．

したがって，直線 l は p の値によらず定点 $\boldsymbol{(-3,\ -1)}$ を通る．

(2)　(1)より直線 l は定点 $(-3,\ -1)$ を通る．

直線 l が $(-1,\ 0)$ を通るとき，傾きは $\dfrac{1}{2}$　　$(1,\ 0)$ を通るとき，傾きは $\dfrac{1}{4}$

よって，$\dfrac{1}{4}\leqq$（直線 l の傾き）$\leqq\dfrac{1}{2}$ であればよい．

$p+1=0$ のとき，直線 l は x 軸に垂直な直線となり不適．

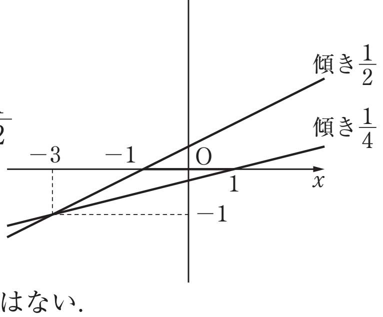
よって　$p+1\neq 0$

したがって直線 l の傾きは　$\dfrac{p}{p+1}$　より　$\dfrac{1}{4}\leqq\dfrac{p}{p+1}\leqq\dfrac{1}{2}$

$p>-1$ のとき　$p+1\leqq 4p\leqq 2(p+1)$

よって　$\dfrac{1}{3}\leqq p\leqq 1$（$p>-1$ を満たす）

$p<-1$ のとき　$p+1\geqq 4p\geqq 2(p+1)$　これを満たす p はない．



以上より，求める p の範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\leqq p\leqq 1}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］　点Pが円 $x^2-2x+y^2-2y-18=0$　の上を動くとき，点 $A(4,\ 1)$ との距離 AP の最小値と最大値を求めよ．

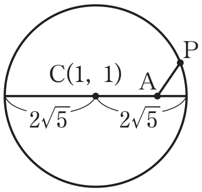
$x^2-2x+y^2-2y-18=0$ より　$(x-1)^2+(y-1)^2=20$

よってこの円の中心は $C(1,\ 1)$，半径は $r=2\sqrt{5}$

$AC=3<r$ より，点 A は円の内部にある．

したがって，円周上の点 P と点 A の距離 AP は

最小値　$r-AC=\mathbf{2\sqrt{5}-3}$　　**最大値**　$r+AC=\mathbf{2\sqrt{5}+3}$　をとる．



3 ［2］　2点 $A(4,\ -2)$，$B(1,\ -3)$ を通り，中心が直線 $y=3x-1$ 上にある円の方程式を求めよ．

求める円の中心は，線分 AB の垂直二等分線上にある．

直線 AB の傾きは $\dfrac{1}{3}$，線分 AB の中点は $\left(\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{5}{2}\right)$ より

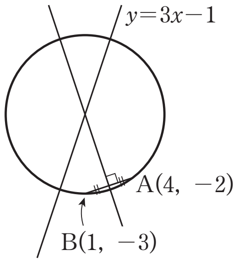
線分 AB の垂直二等分線は　$y=-3\left(x-\dfrac{5}{2}\right)-\dfrac{5}{2}=-3x+5$

これと直線 $y=3x-1$ の交点が求める円の中心である．

2式を連立することにより　$x=1$，$y=2$

よって中心の座標は $(1,\ 2)$，半径は $\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

したがって，求める円の方程式は　$\mathbf{(x-1)^2+(y-2)^2=25}$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　図形と方程式(1)

[1]　2直線 $2x+3y=1$，$3x+y=5$ の交点を通り，直線 $3x+2y=6$ に平行な直線の方程式は $y=-\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}x+\boxed{ウ}$ である．

[2]　直線 $(5k+3)x-(3k+5)y-10k+10=0$ が k の値によらず通る定点の座標は $(\boxed{エ},\ \boxed{オ})$ である．

[3]　3点 A(5，4)，B(1，2)，C(6，1) がある．線分 AB の垂直二等分線を表す式は $y=-\boxed{カ}x+\boxed{キ}$ である．また，3点 A，B，C を通る円の中心の座標は $\left(\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}},\ \dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}\right)$ である．

解答例

[1]　2直線の交点は $(2,\ -1)$　この点を通り，直線 $3x+2y=6$（傾き $-\dfrac{3}{2}$）に平行な直線の方程式は　$y=-\dfrac{3}{2}(x-2)-1$　つまり　$\boldsymbol{y=-\dfrac{3}{2}x+2}$

(別解)　2直線 $2x+3y=1$，$3x+y=5$ の交点を通る直線は

$(2x+3y-1)+k(3x+y-5)=0$　つまり　$(3k+2)x+(k+3)y-5k-1=0$ と表せる．

この直線の傾きが $-\dfrac{3}{2}$ より　$-\dfrac{3k+2}{k+3}=-\dfrac{3}{2}$　　$k=\dfrac{5}{3}$ のとき．

よって求める直線は　$7x+\dfrac{14}{3}y-\dfrac{28}{3}=0$　　つまり　$y=-\dfrac{3}{2}x+2$

[2]　$(5k+3)x-(3k+5)y-10k+10=0$　より　$(5x-3y-10)k+3x-5y+10=0$

この式が k の恒等式となるのは　$5x-3y-10=0$，かつ　$3x-5y+10=0$

つまり　$x=5$，$y=5$　　よって求める定点の座標は　**(5，5)**

[3]　直線 AB の傾きは $\dfrac{1}{2}$，線分 AB の中点は $(3,\ 3)$

よって線分 AB の垂直二等分線は　$y=-2(x-3)+3$

つまり　$\boldsymbol{y=-2x+9}$　……①

直線 AC の傾きは -3，線分 AC の中点は $\left(\dfrac{11}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$

よって線分 AC の垂直二等分線は　$y=\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{11}{2}\right)+\dfrac{5}{2}$

つまり　$y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$　……②

3点 A，B，C を通る円の中心は，①と②の交点で，その座標は $\boldsymbol{\left(\dfrac{25}{7},\ \dfrac{13}{7}\right)}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。